MINISTÈRE DE L'ÉQUIPEMENT
DES TRANSPORTES ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1994
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES
Temps accordé : 2 heures

Un corrigé

Partie A

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= \ln\left((n+1)^\gamma u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\gamma u_n\right) \\ &= \gamma \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \gamma \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\gamma + \ln\frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)} \\ &= \gamma \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{b}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{c}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{d}{n}\right), \end{aligned}$$

d'où :

$$w_n = \gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2}\right) + \left(\frac{b}{n} - \frac{b^2}{2n^2}\right) - \left(\frac{c}{n} - \frac{c^2}{2n^2}\right) - \left(\frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et ainsi :

$$w_n = \frac{\gamma + a + b - c - d}{n} + \frac{-\gamma - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge donc pour que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge, il faut que $\gamma+a+b-c-d = 0$, c'est-à-dire $\gamma = -a-b+c+d$.
Réciproquement, si $\gamma = -a-b+c+d$, alors $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge absolument. Donc, par comparaison, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge.
Finalement, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge si, et seulement si $\gamma = -a-b+c+d$.

(b) Dans ce cas, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge, notons l sa somme. Or, par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1,$$

ce qui signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers $l + v_1$). Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi $u_n = \dfrac{e^{v_n - v_1}}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} e^{v_n - v_1} = e^l$, donc, avec $L = e^l > 0$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{c+d-a-b}}.$$

On sait que la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $fa > 1$, donc par comparaison la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si, et seulement si $\gamma = -a-b+c+d > 1$.

2. (a) On sait que la fonction $\arcsin$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Or, on sait que :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n,$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k).$$

On a donc ici avec $\alpha = \dfrac{-1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+2k}{2}\right) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

On a donc :

$$(1+u)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n,$$

d'où on tire :

$$(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Enfin, par intégration, sachant que $\arcsin(0) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}. \quad (1)$$

Pour déterminer le rayon de convergence, on utilise le critère de D'Alembert. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$. Alors :

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de $\arcsin$ est $R_f = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} = \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}{1+\frac{5}{2n}+\frac{3}{2n^2}},$$

d'où :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{5}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, d'après le critère de Raabe-Duhamel, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$ converge. Or :

$$\forall x \in [-1,1], \;\; |b_n x^{2n+1} \leq b_n,$$

donc la série entière de $\arcsin$ converge normalement sur $[-1,1]$, l'égalité (1) est donc valable sur toute l'intervalle $[-1,1]$.

Partie B

1. (a) D'après ce qui précède, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge si, et seulement si $\gamma = -b + d > 1$. Dans ce cas, on a :

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{L}{n^{d-b-1}}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)u_{k+1} - ku_k = (n+1)u_{n+1},$$

donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k = 0$. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+d)u_{n+1} = (n+b)u_n,$$

d'où :

$$(n+1)u_{n+1} - nu_n = bu_n - (d-1)u_{n+1},$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} z_k &= b\sum_{k=0}^{n} u_k - (d-1)\sum_{k=0}^{n} u_{n+1} \\
&= b\sum_{k=0}^{n} u_k - (d-1)\left(\sum_{k=0}^{n} u_k - u_0 + u_{n+1}\right) \\
&= (b-d+1)\sum_{k=0}^{n} u_k + (d-1)(u_0 - u_{n+1}).
\end{aligned}$$

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $0 = (b-d+1)\sum_{k=0}^{\infty} u_k + (d-1)u_0$, et donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{(d-1)u_0}{d-b-1}.$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+b}{n+d} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ est $R_h = 1$.

(b) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-x)h'(x) &= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nu_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nu_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nu_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nu_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)u_{n+1} - nu_n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(bu_n - (d-1)u_{n+1}\right) x^n \\
&= b\sum_{n=0}^{8} u_n x^n - (d-1)\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; x(1-x)h'(x) = (bx - (d-1))h(x).$$

(c) Pour $d = 1$, on obtient l'équation $x(1-x)h(x) = bxh(x)$, soit :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; h(x) = \frac{b}{x-1}h(x).$$

On en déduit que $\forall x \in]-1,1[, \;\; h(x) = h(0)e^{-b\ln|x-1|}$, ou encore :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; h(x) = u_0 e^{-b\ln(1-x)}.$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{u'_{n+1}}{u'_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$$

qui tend vers 1 à l'infini. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} u'_n x^n$ est $R' = 1$. De plus, on est dans le cas où $b = \dfrac{1}{2}$ et $d = 1$, donc d'après l'étude précédente :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} u'_n x^n = e^{\frac{-1}{2}\ln(1-x)},$$

soit :

$$\forall x \in]-1,1[, \;\; \sum_{n=0}^{\infty} u'_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

3. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t^3+1)^{n+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{(t^3+1)^{n+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n+3}}$ qui est une fonction positive et intégrable au voisinage de $+\infty$. Il s'ensuit que les intégrales I_n sont bien convergentes.

De plus, une intégration par parties donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^{n+1}} \\
&= \left[\frac{t}{(t^3+1)^{n+1}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t(n+1)3t^2}{(t^3+1)^{n+2}}\mathrm{d}t \\
&= 0 + 3(n+1)\int_0^{+\infty} \frac{(t^3+1)-1}{(t^3+1)^{n+2}}\mathrm{d}t \\
&= (3n+3)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^{n+1}} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^{n+2}} \\
&= (3n+3)I_n - (3n+3)I_{n+1},
\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ I_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} I_n.$$

(b) D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{3n+2}{3n+3} = 1 - \frac{1}{3n+3} = 1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

donc, d'après la règle de Raabe-Duhamel la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n$ diverge.

D'autre part, $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n I_n$ est une série alternée avec $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit puisque $\frac{I_{n+}}{I_n} = \frac{3n+2}{3n+3} < 1$, de plus la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$, dominée par le fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$, qui est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0$. D'après le critère spécial des séries alternées : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n I_n$ converge.

Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n I_n x^n$ converge pour $x = 1$ et diverge pour $x = -1$, on en déduit que son rayon de convergence est 1 et donc, l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n I_n x^n$ est $]-1,1]$.

(c) Calculons I_0, en utilisant une décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{X^3+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^3+1} &= \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} &= \frac{1}{3}\left[\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right].
\end{aligned}$$

D'où
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

(d) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(t^3+1)^{k+1}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{t^3+1}\right)^k \mathrm{d}t,$$

d'où, en reconnaissant une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} \times \frac{1-\left(\frac{-1}{t^3+1}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{-1}{t^3+1}\right)} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\frac{-1}{t^3+1}\right)^{n+1}}{t^3+2} \mathrm{d}t$$

ou encore :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+2} + J_n$$

avec $J_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+2)(t^3+1)^{n+1}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|J_n| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2(t^3+1)^{n+1}} = \frac{1}{2} I_n,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = 0$, et le changement de variable $t = \sqrt[3]{2}u$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2}\mathrm{d}u}{2(u^3+1)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} I_0,$$

d'où on peut conclure :
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} I_0 = \frac{\sqrt[3]{2}\pi}{3\sqrt{3}}.$$

• • • • • • • • •